N° 0287

Première composition de mathématiques — Concours 1982

On considère les intégrales $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta$ et $K_n = \int_0^1 \mathrm{ch}^n t \, dt$, qui dépendent de l'entier naturel n. On pose $a_n = \frac{K_n}{I_n}$ avec $a_0 = \frac{2}{\pi}$. L'objet du problème est l'étude du rayon de convergence et de la somme de la série entière de terme général $u_n(x) = a_n x^n$, avec x réel.

1°)

a) Établir, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence liant I_{n+1} et I_{n-1}.

b) En déduire la valeur de I_n selon que n est pair ou impair.

c) Montrer que quelque soit n, la valeur du produit $n . I_n . I_{n-1}$ est constante.

2°)

a) Donner le terme général du développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et le rayon de convergence de cette série entière.

b) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $w_k(x) = I_{2k} x^{2k}$.

3°)

a) On pose $\alpha = ch.\, 1$, $\beta = sh\, 1$. Établir que $a_{n+1} = a_0 \beta I_n \alpha^n + a_{n-1}$.

(On cherchera une relation entre K_{n+1} et K_{n-1}).

b) En déduire $a_{2p+1} = a_0 \beta \sum_{k=0}^{p} I_{2k} \alpha^{2k}$ puis $u_{2p+1}(x) = a_0 \beta x \sum_{k=0}^{p} w_k(\alpha x) . x^{(2p-2k)}$.

c) Démontrer que pour $|x| < \frac{1}{\alpha}$, la série entière de terme général $u_{2p+1}(x)$ converge, en donner la somme. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

d) Application numérique : Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de la somme de cette série entière pour $x = \frac{1}{2\alpha}$.

4°) On considère la série entière de terme général $v_k(x) = I_{2k+1} x^{2k}$.

a) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

b) Établir entre $v_k(x)$, $v_{k+1}(x)$ et leurs dérivées $v_k'(x)$, $v_{k+1}'(x)$ la relation :

$$x\, v_{k+1}'(x) + v_{k+1}(x) = x^3 v_k'(x) + 2x^2 v_k(x)$$

c) En déduire que sur l'intervalle de convergence de la série entière de terme général $v_k(x)$, la somme $V(x)$ de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, E.

d) Déterminer au moyen de E la fonction $V(x)$ sur son intervalle d'existence.

5°)

a) Calculer a_1. Montrer que $a_{2p} = a_0 \beta \sum_{k=0}^{p-1} I_{2k+1} \alpha^{2k+1} + a_0$,

et que $u_{2p}(x) = a_0 \beta \alpha x^2 \sum_{k=0}^{p-1} v_k(\alpha x) . x^{2p-2k-2} + a_0 x^{2p}$ pour $p \geqslant 1$.

b) En déduire que pour $|x| < \frac{1}{\alpha}$, la série entière de terme général $u_{2p}(x)$ converge, en donner la somme. Quel est son rayon de convergence ?

c) Quelle est la somme de la série entière de terme général $u_n(x)$, et quel est son rayon de convergence ?

d) Application numérique : Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de la somme de cette série entière pour $x = \frac{1}{2}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail